Génie mécanique

Partie II: Cours No 5.1
Elasticité linéaire

V.Michaud

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappel contenu du cours

Introduction, les matériaux
Partie I: De l'atome à la structure des matériaux (11/09-2/10)

- Structure atomique, tableau périodique,
- Liaisons chimiques, Structure des matériaux

Partie II: Propriétés mécaniques (7/10-4/11)

- Elasticité linéaire/plasticité,
- Ductilité et dureté,
- Ténacité,
- Fatigue et usure, étude de cas

Partie III: Phénomènes thermodynamiques, concepts du rôle de la chaleur, du temps, des équilibres (6/11-9/12)

- Dans les corps purs, dans les mélanges réactifs (réactions chimiques) Réactions chimiques: acide base /oxydo-réduction, piles et electrolyse
- Dans les mélanges non réactifs (alliages, diagrammes de phase)

Partie IV: Propriétés fonctionnelles des matériaux (11-18/12)
Propriétés thermiques/ Comportement à haute température,
Propriétés électriques, magnétiques.

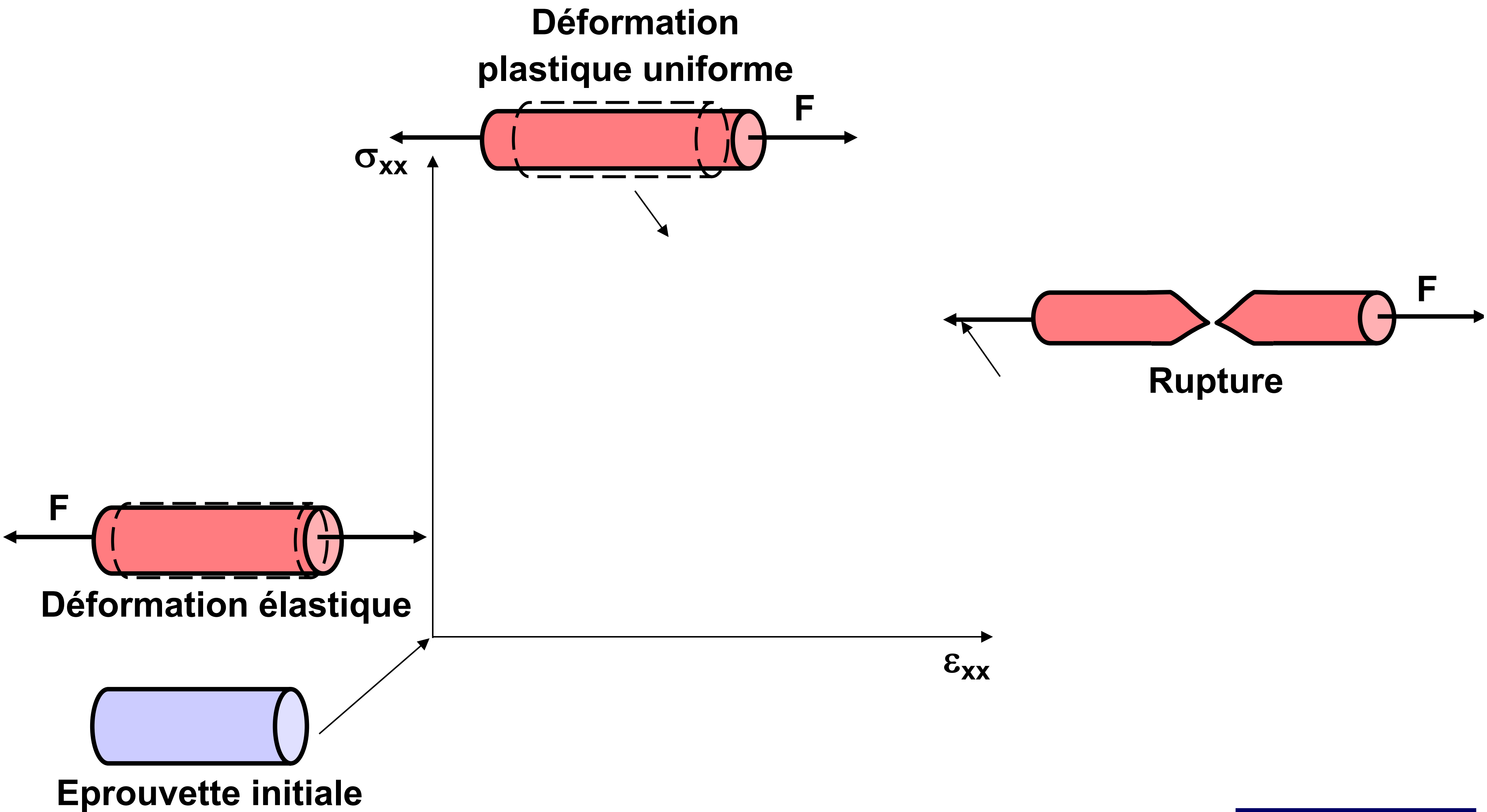
Table des matières

- D'où vient l'élasticité des matériaux?
- Contraintes et déformations
- Exemples de propriétés élastiques des matériaux

Objectifs du cours

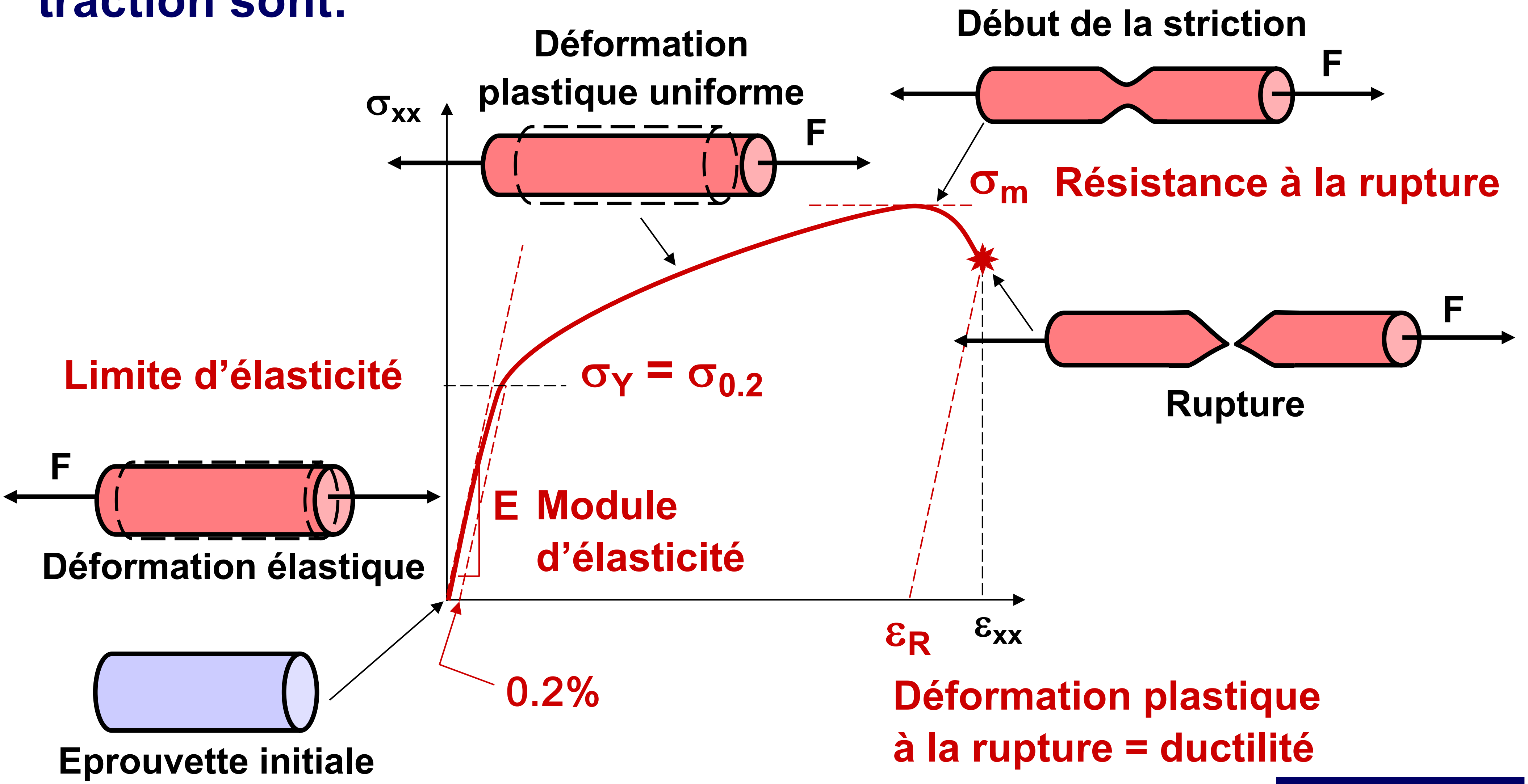
- Voir un test de traction
- Découvrir les propriétés d'élasticité linéaire des matériaux et comprendre d'où elles proviennent.
- Apprendre les cas de chargement en traction/compression.

Test de traction d'un métal

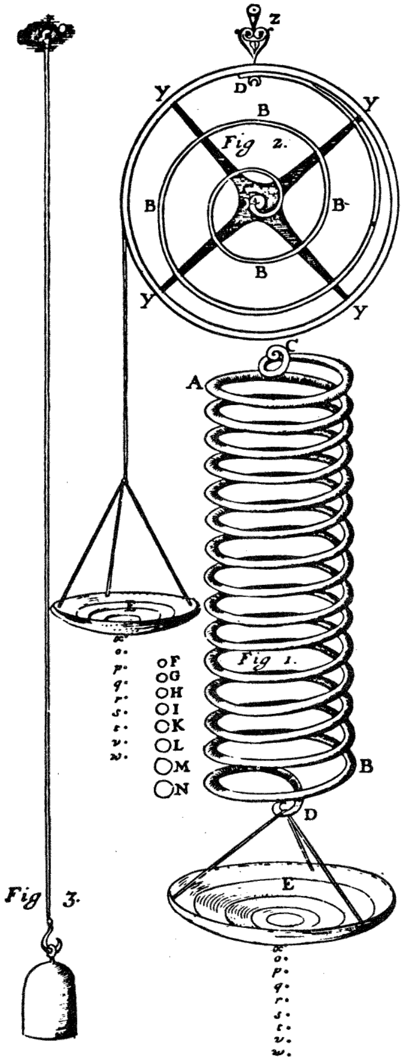


Test de traction d'un métal

Pour un métal typique, les étapes de la déformation en traction sont:



Propriétés élastiques des matériaux



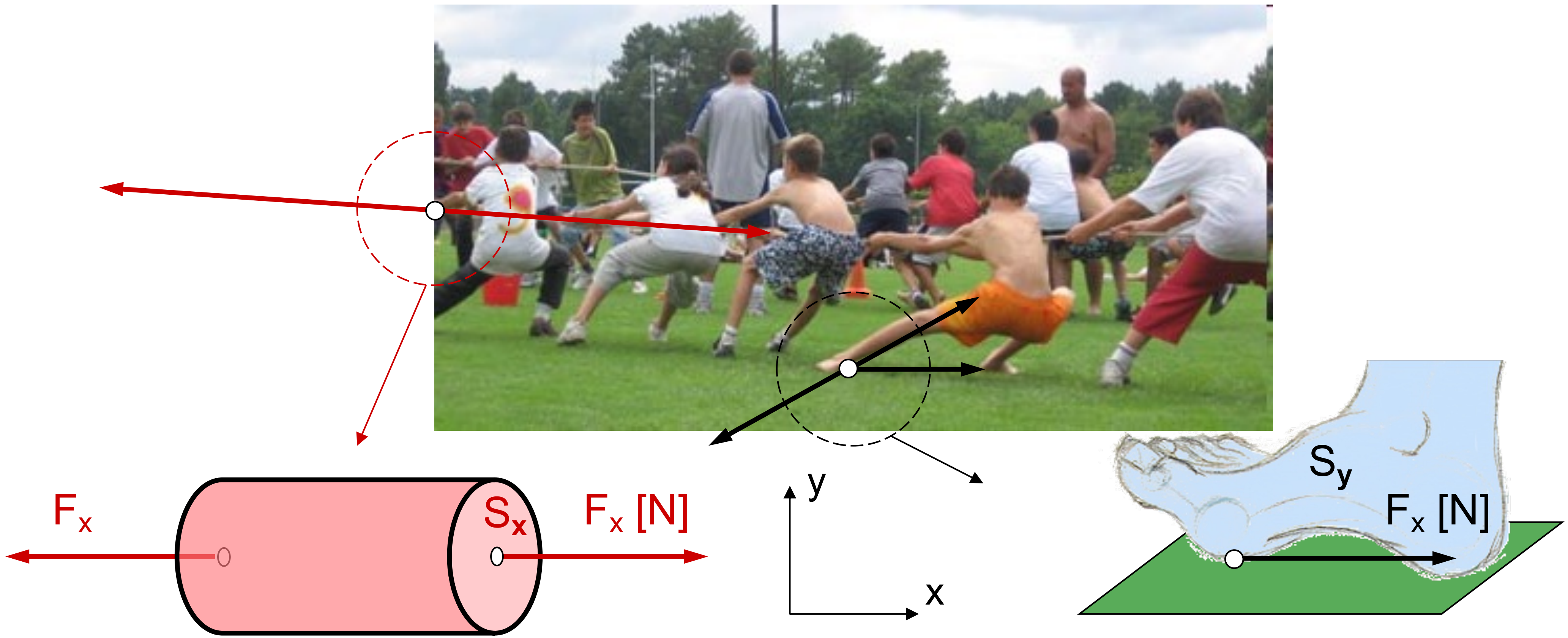
La connaissance de la structure interne de la matière, et du type de liaisons entre les atomes permet d'estimer la rigidité des matériaux…voir fin de ce cours.

Historiquement, on a procédé bien sur de manière inverse…On a un matériau, on effectue un essai de traction et on enregistre la force qu'il faut appliquer pour imposer une déformation donnée…

Loi de Hooke (1660): l'allongement est proportionnel à la force.

Par Robert Hooke — De potentia restitutiva, Domaine public, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=13816354

Définition de: Contraintes

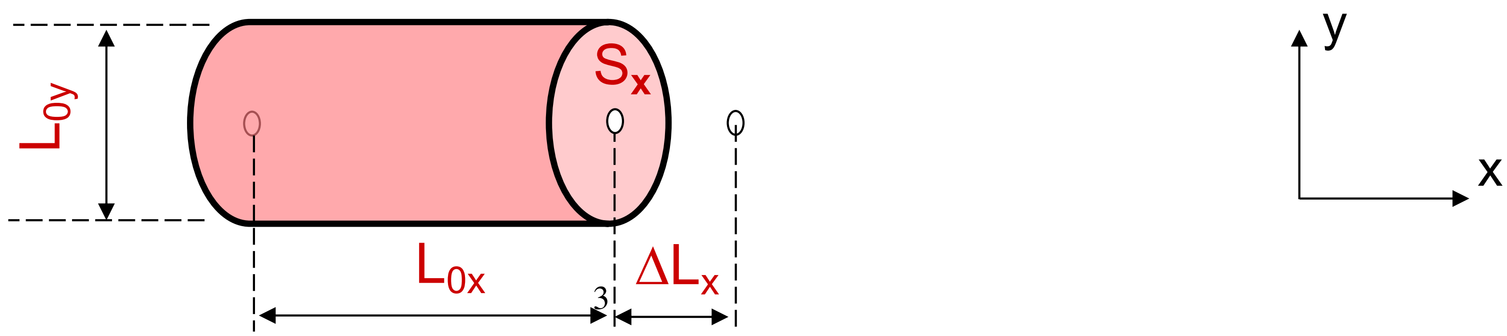


Contrainte en traction:

Contrainte en cisaillement:

Définition de :Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.



En traction:

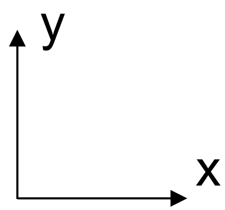
Sans dimension !

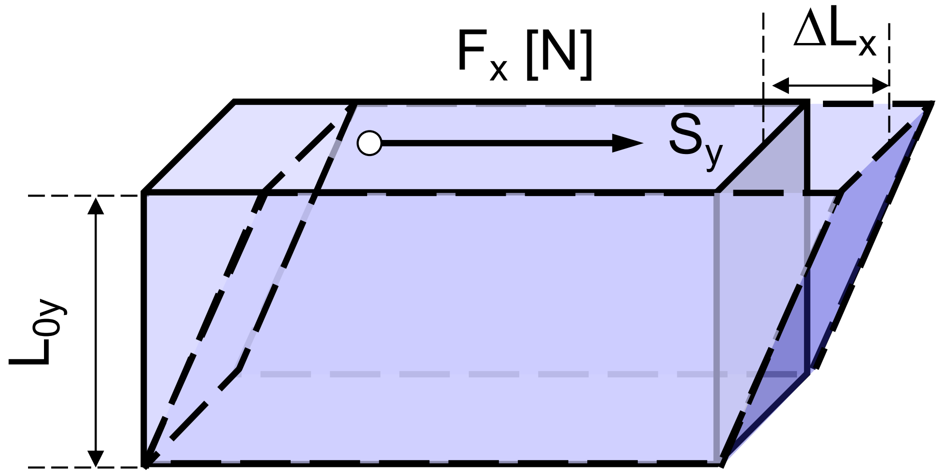
Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.

En cisaillement

Sans dimension !



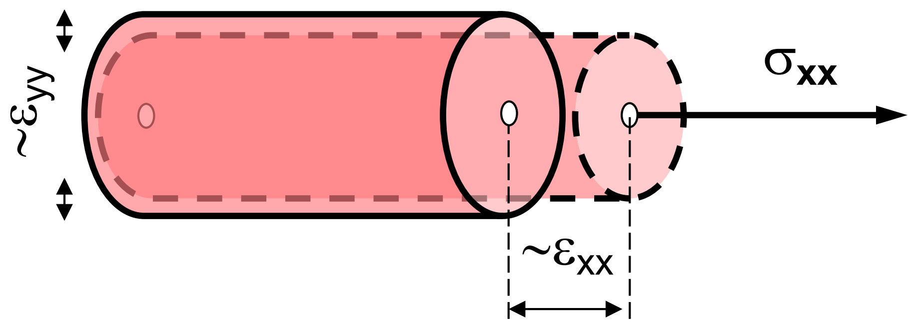


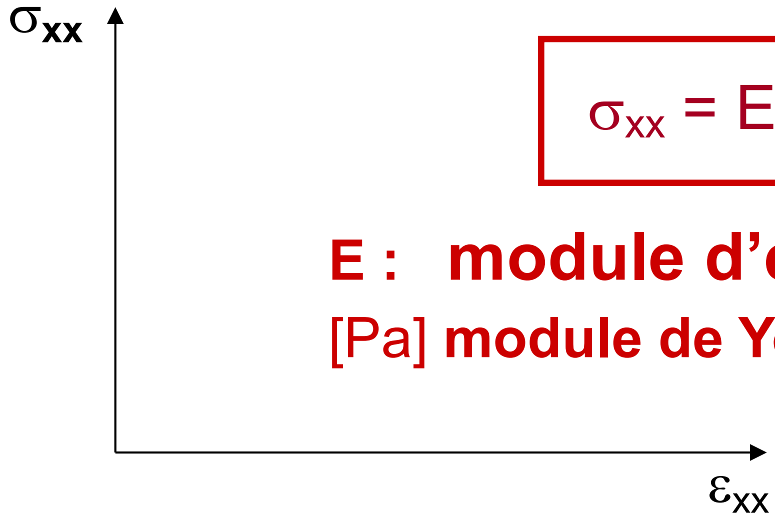
(Facteur ½ par convention pour des raisons que vous verrez plus tard, Physique 3, et γ déformation en cisaillement)

Traction /compression uniaxiale

Dans une gamme de déformation dite **élastique**, un corps soumis à une charge normale se déforme mais revient à sa position originale une fois déchargé (**déformation réversible**).

Si la relation entre contrainte et déformation est linéaire, on parle de déformation élastique linéaire.





$$\boxed{\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}}$$

E : module d'élasticité

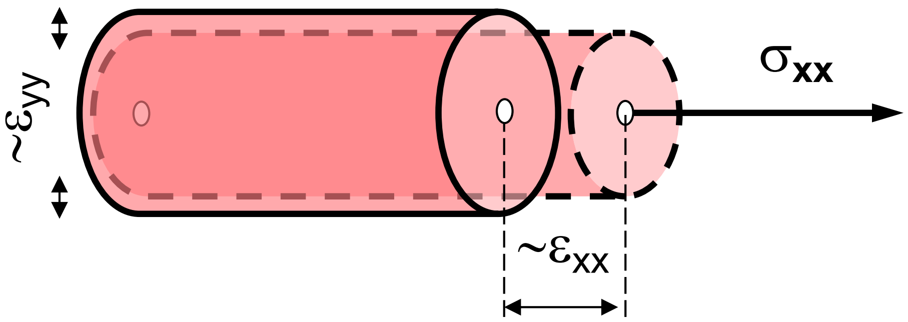
[Pa] **module de Young**

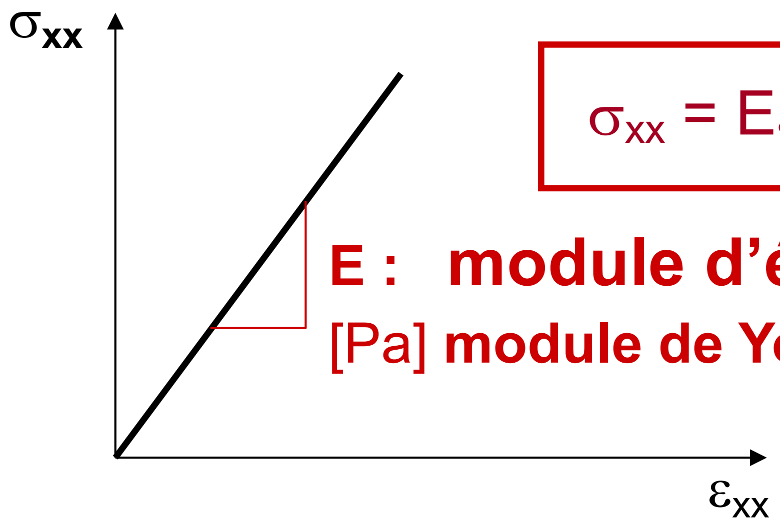
$\sigma_{xx}=F_x/S_x$

On observe $F_x=k\,\Delta l$

Alors $\sigma_{xx}=k\,\Delta l/S_x=kl_0/S_x.\Delta l/l_0=E\,\varepsilon_{xx}$

Cas de chargement: Traction/compression uniaxiale





$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

E : module d'élasticité

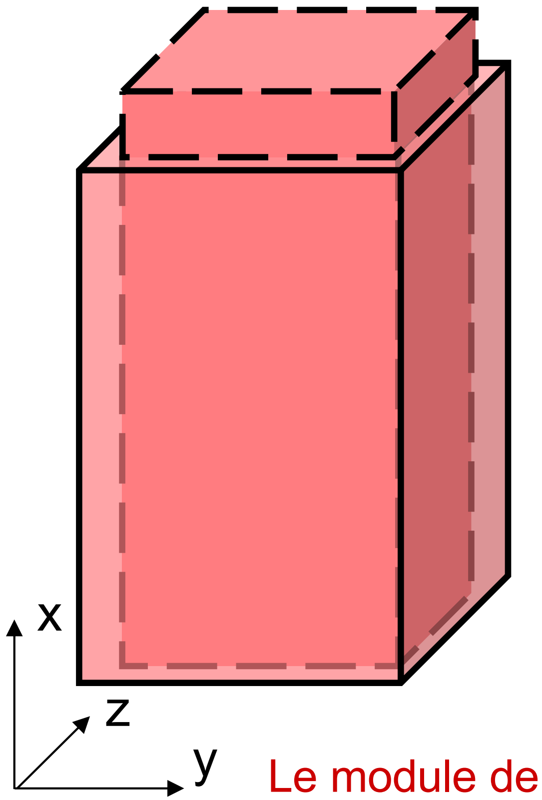
[Pa] **module de Young**

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}$$

ν : **le coefficient de Poisson** mesure la contraction latérale lors d'une déformation uniaxiale

Traction/compression uniaxiale

Lors d'une déformation uniaxiale (ou autre), le matériau subit un **changement de volume** donné par:

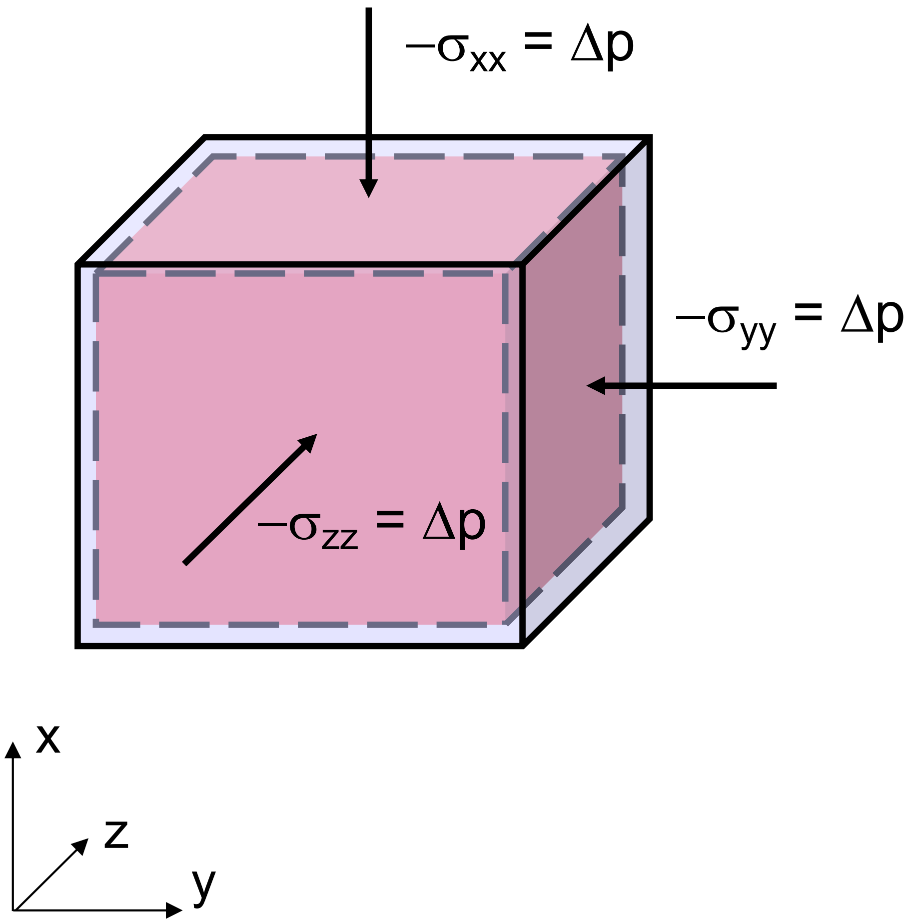


Le module de Poisson est donc ≤ 0.5.

Le caoutchouc, avec $\nu \cong 0.5$ se déforme élastiquement presque sans changement de volume.

Compression hydrostatique

Une **compression hydrostatique** correspond à une **contrainte normale constante** (négative) sur toute la surface du solide.



On définit le **coefficient de compressibilité** K comme:

$$\boxed{K = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad [\mathrm{Pa}]}$$

Pour un solide isotrope, on peut montrer que

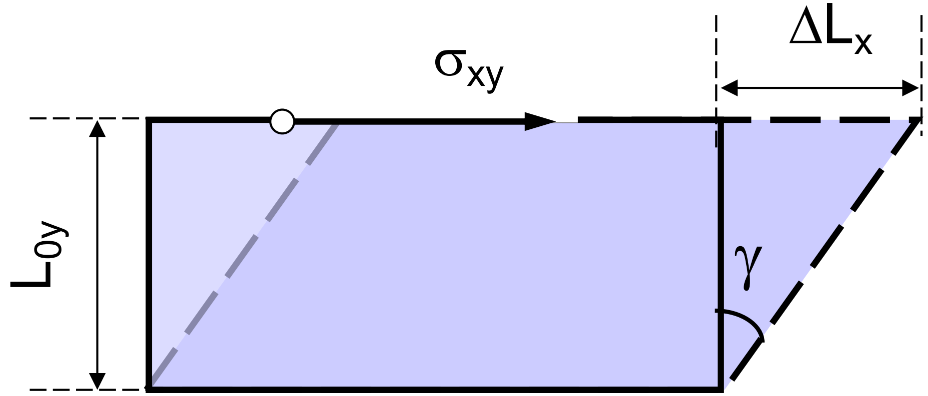
(voir le calcul dans la dernière planche du cours):

$$\boxed{K = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\nu}}$$

Cas de chargement: Cisaillement simple

Un corps soumis à un cisaillement simple élastique permet de définir un **module de cisaillement G**.

$$\sigma_{xy} = G\,2\varepsilon_{xy} = G\gamma = G\frac{\mathbf{\Delta L_x}}{\mathbf{L_{0y}}}$$

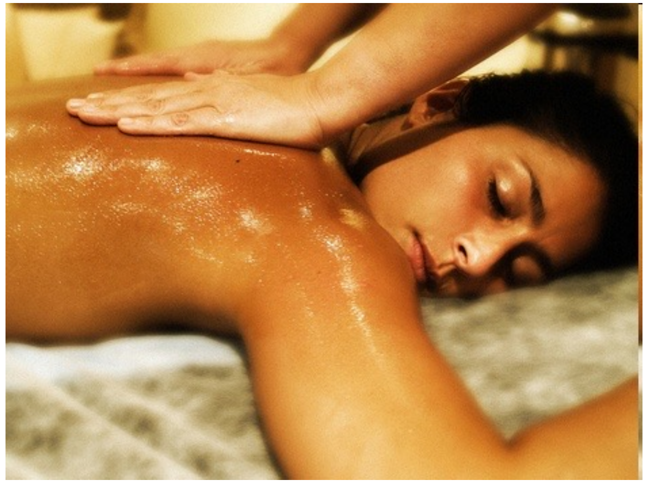


Cas de chargement: Cisaillement simple

Ces procédés sont-ils du cisaillement? Elastique?

Application de vernis

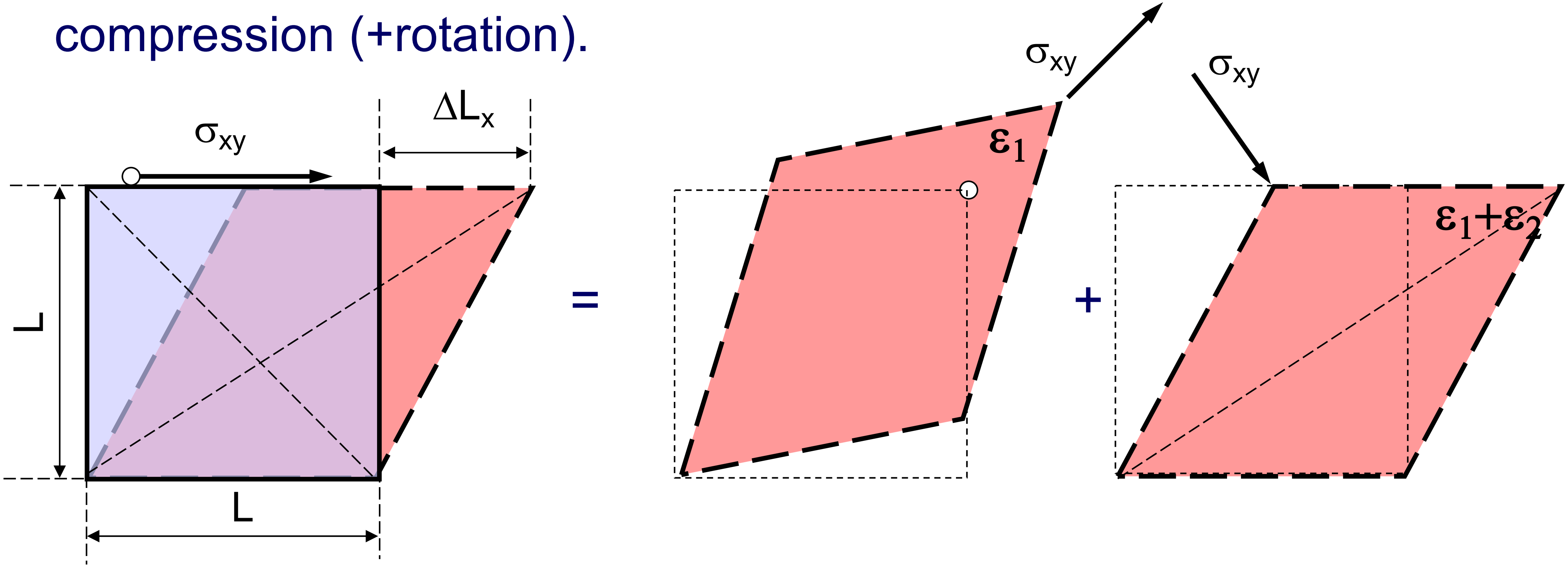
Freinage



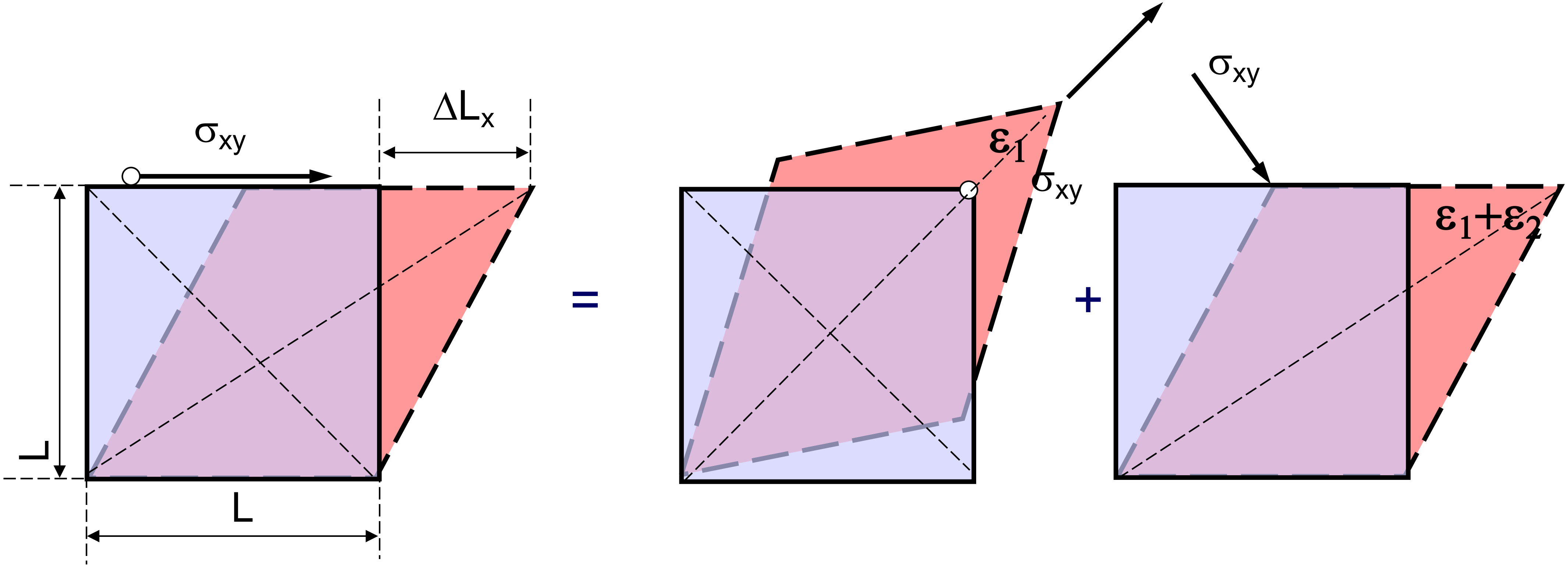
Massage

Relation entre E, ν et G

Pour un solide **isotrope**, E, ν et G ne sont pas indépendants. Une contrainte de cisaillement peut être décomposée en une traction + compression (+rotation).

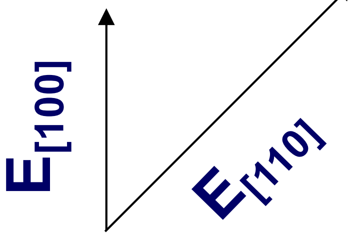


Relation entre E, ν et G

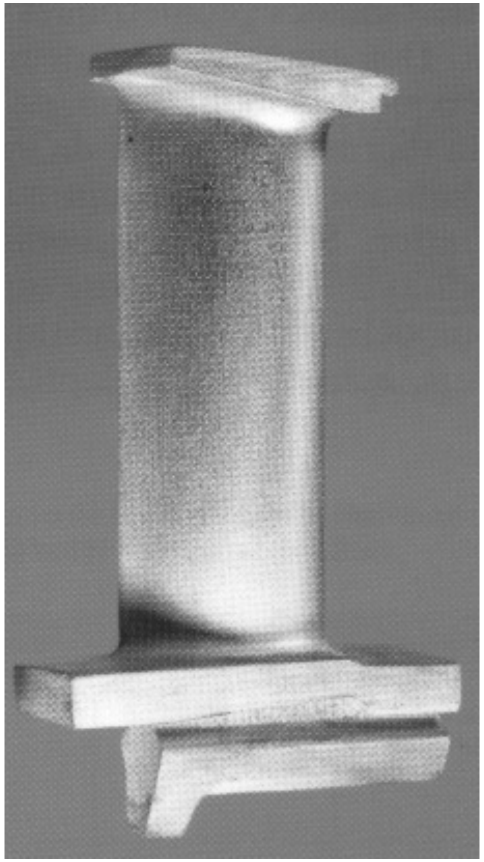


Anisotropie des propriétés élastiques

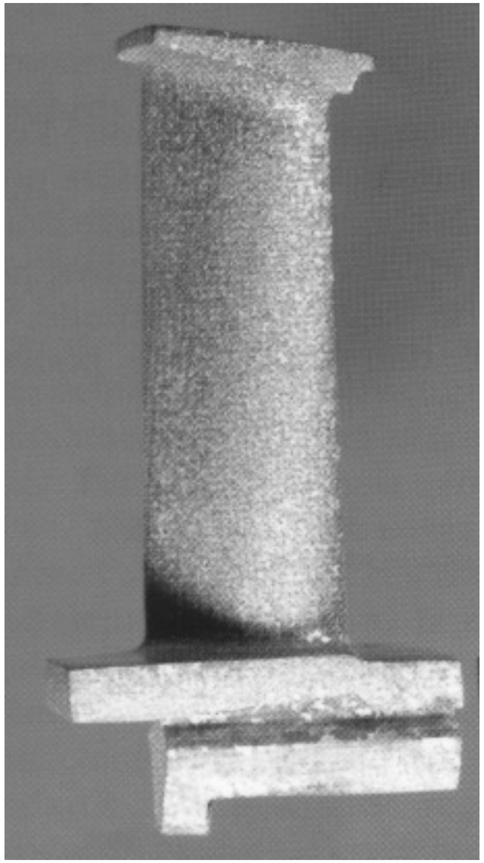
Les coefficients (E, ν, G) peuvent dépendre de l'orientation et sont donc **anisotropes** (ex. monocristal). Un échantillon polycristallin présente des **propriétés isotropes**.



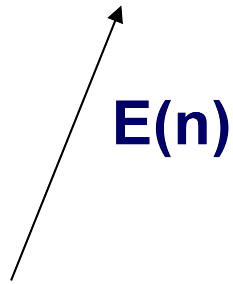
$$E_{[100]} \neq E_{[110]}$$



Aube de turbine monocristalline



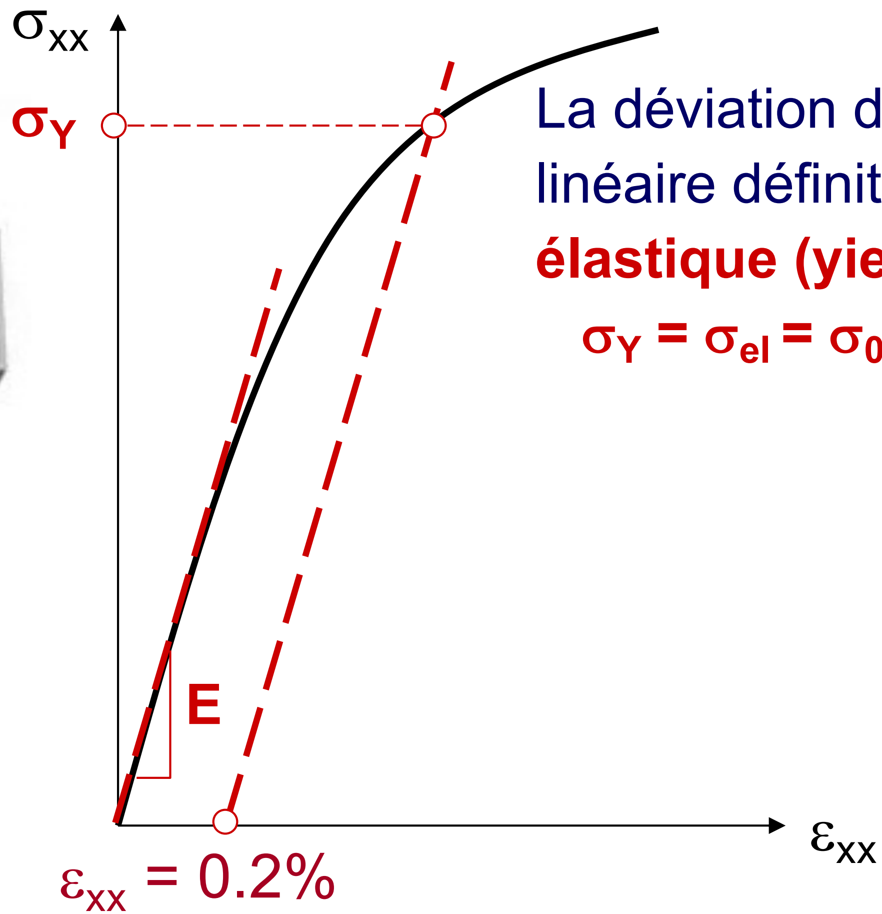
Aube de turbine polycristalline



$$E(n) = E \quad \forall\ n$$

Méthodes de mesure

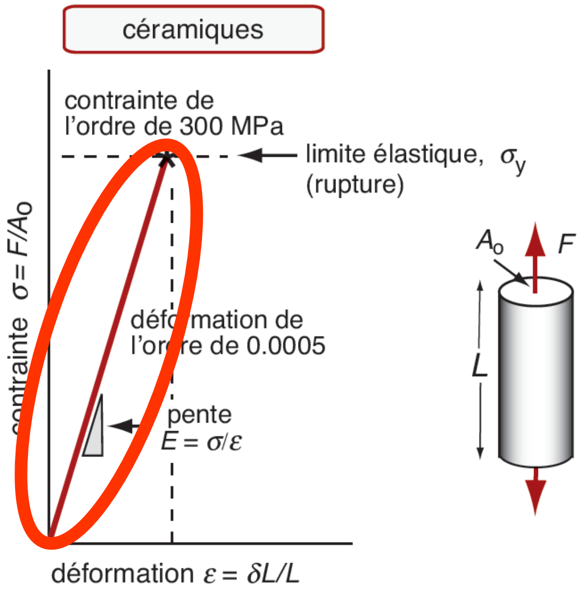
La mesure du module élastique et du coefficient de Poisson se fait généralement sur une **éprouvette de traction**. On impose un mouvement et on mesure force/allongement par des capteurs.

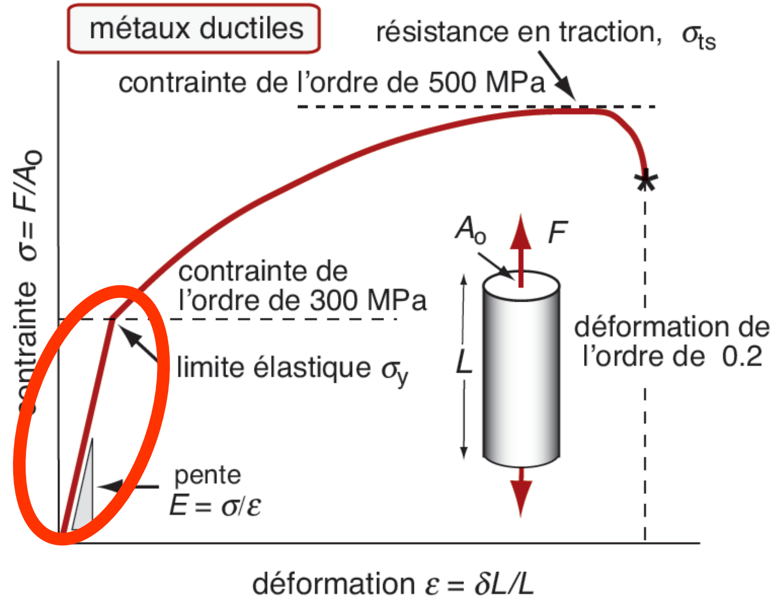


La déviation du comportement linéaire définit **une limite élastique (yield strength)**

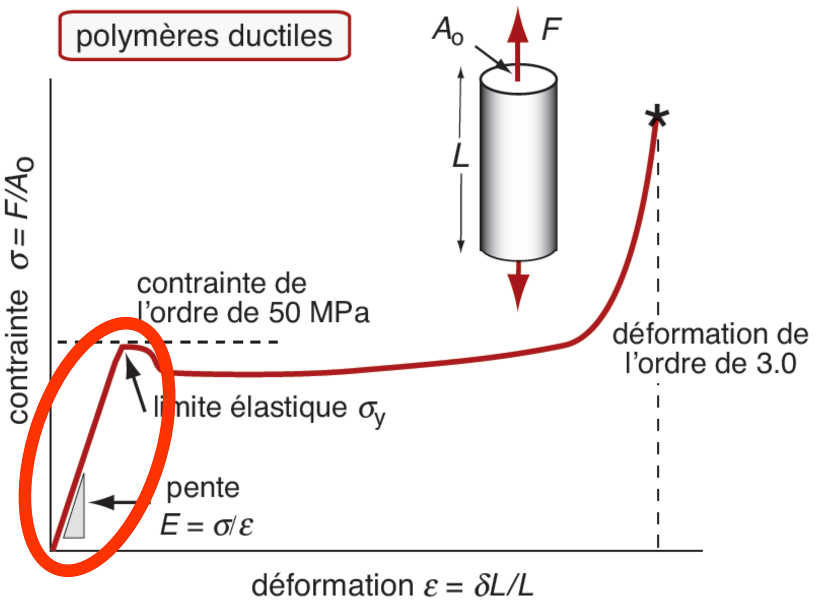
$$\sigma_Y = \sigma_{el} = \sigma_{0.2\%}$$

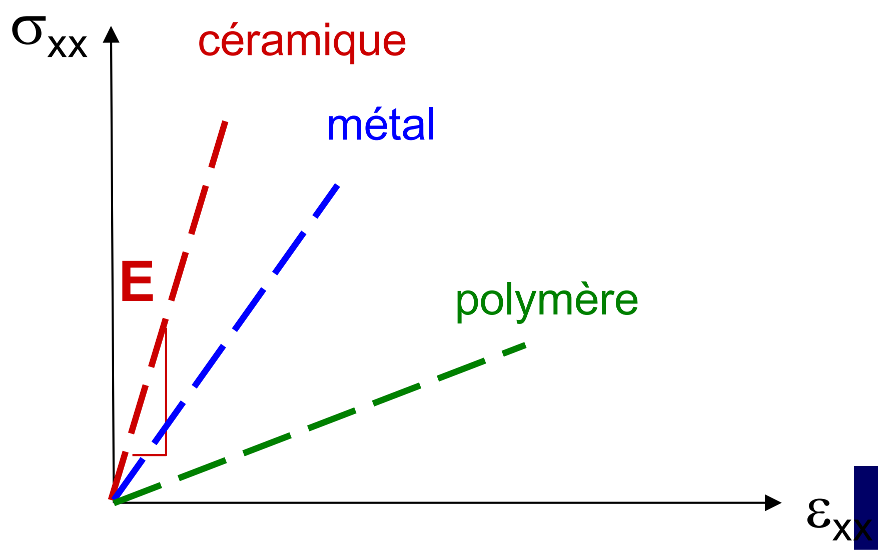
Exemples de comportements





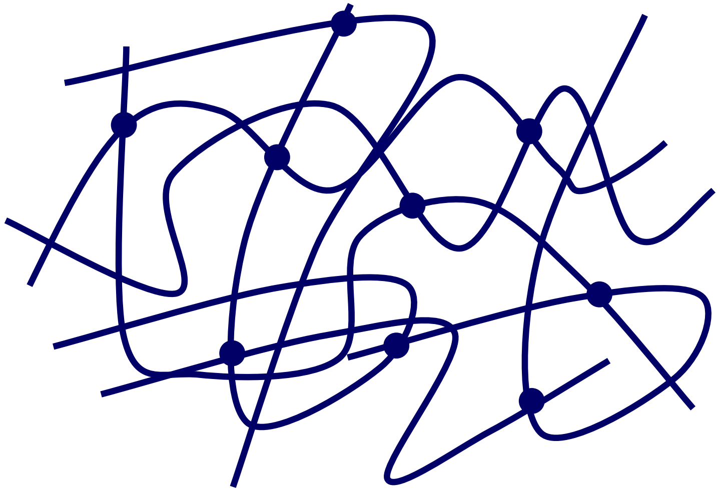
Repris de M. Ashby et al



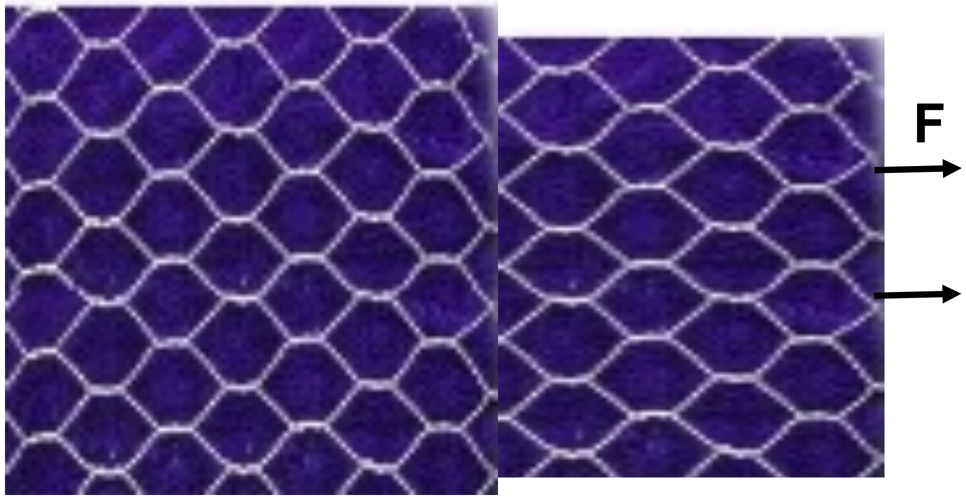


Elastomères

Pour un élastomère, la déformation élastique a lieu grâce aux ponts entre les molécules, un peu comme un treillis.



F = 0

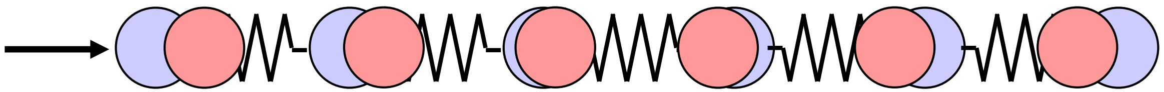


La déformation élastique peut atteindre 1000%. Au-delà d’une limite, tous les ligaments entre ponts sont étirés et le matériau se durcit.

Autre méthode de mesure

La propagation des **ondes acoustiques** dans un matériau est aussi un moyen de mesurer ses propriétés élastiques.

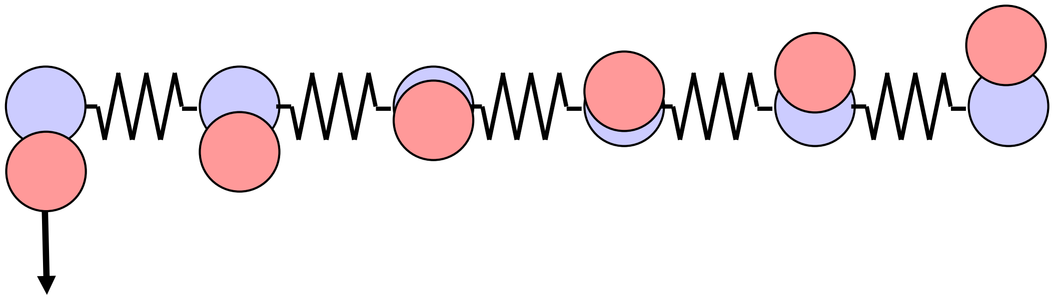
Ondes **longitudinales** (traction-compression)

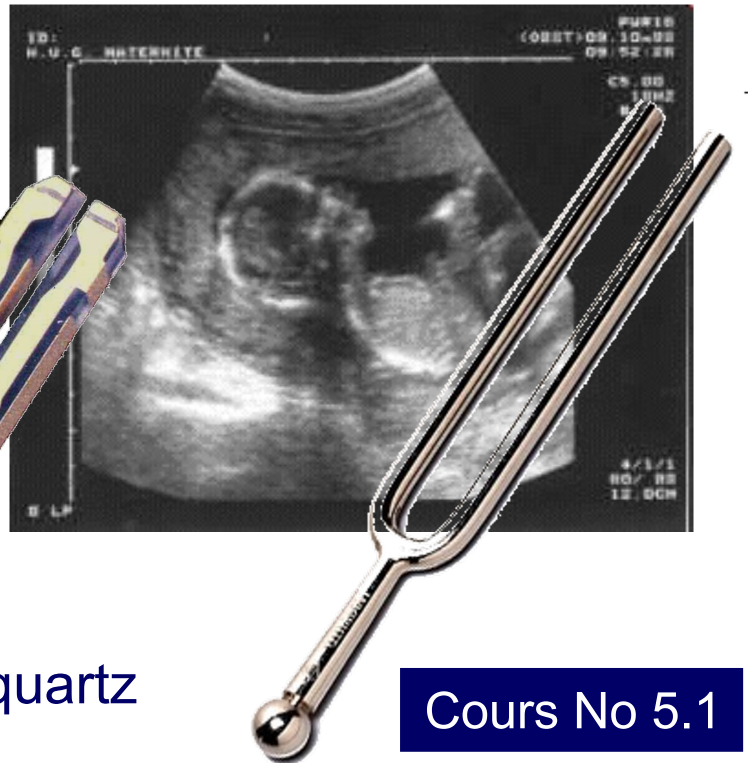


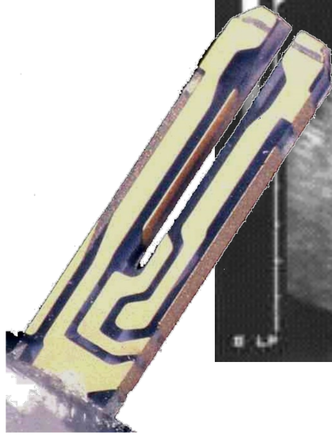
Vitesse de propagation

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Ondes **transverses** (cisaillement)







Echographie

Diapason et diapason quartz

Traction/compression uniaxiale

Quelques exemples de propriétés:

Matériaux	E [GPa]	ν [-]
Caoutchouc	0.001-0.1	~0.5
PTFE (Teflon)	0.5	0.46
Nylon	2 - 4	0.39
Chêne	11	0.3
Béton (en compression)	30	0.2
Aluminium	69	0.33
Verre	50 - 90	0.18 - 0.3
Acier	200	0.3
Saphir (Al2O3) axe c	435	0.3
Carbure de silicium (SiC)	450	0.17
Carbure de tungstène (WC)	450 - 650	0.22
Nanotubes de carbone	>1.000	~0.2
Diamant	1220	0.1

D'où viennent les propriétés élastiques des matériaux?

Rappel: Mis à part les forces de gravitation, toutes les autres forces de la vie "courante" sont de nature électrique.

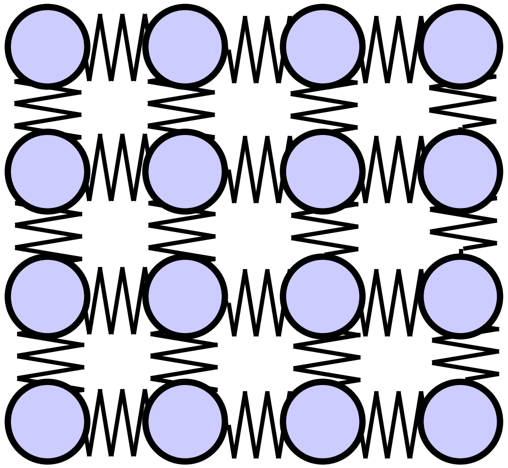
La rigidité du matériau est directement liée à la structure interne du matériau en question, et au type de liaisons.

Rappel des types de liaisons dans les solides:

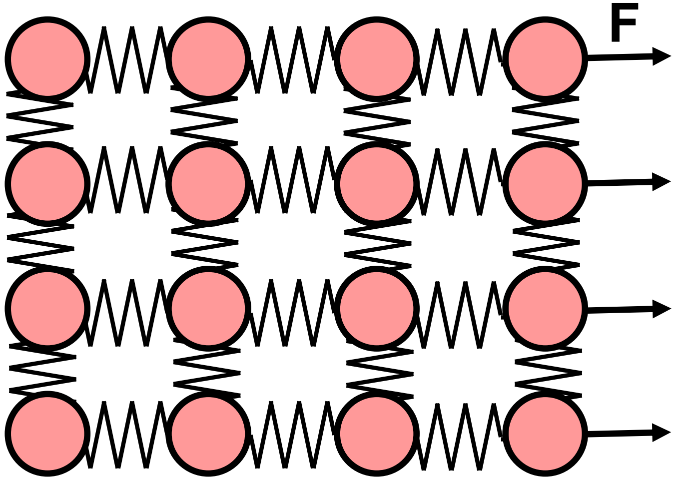
Type de liaison	**Energie (kJ/mole)**
Ionique	>40
Covalente	300-400
Métallique	>40
Faible	1-40 (400 pour H)

Propriétés élastiques des matériaux cristallins

Pour un cristal, il est aisé de relier les propriétés élastiques aux liaisons interatomiques.



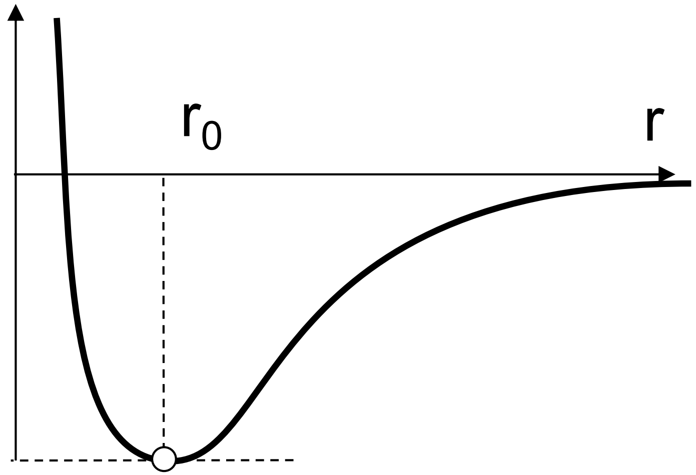
F = 0



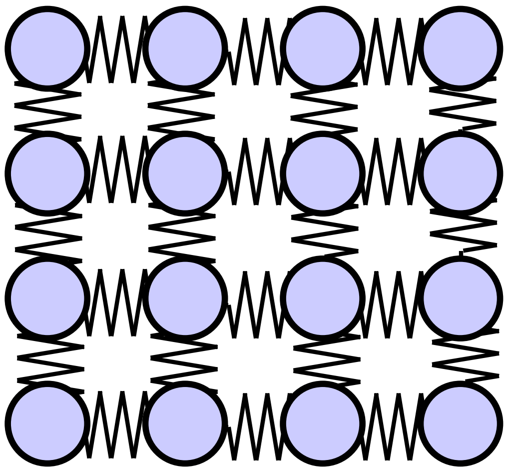
F

En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

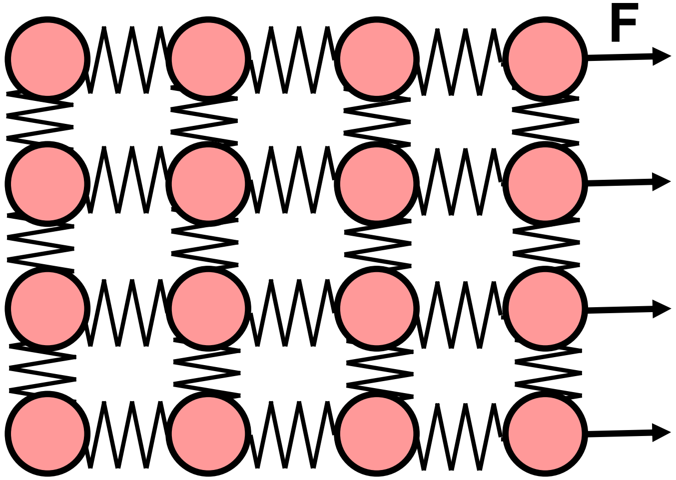
$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$



Propriétés élastiques des matériaux cristallins



F = 0



F

Comment estime-t-on cette raideur ou rigidité E?

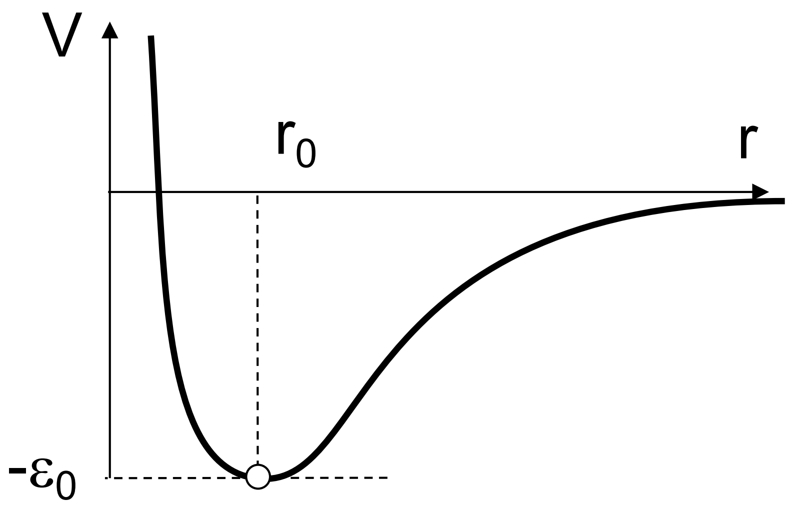
Il faut connaître le concept de contrainte et déformation, présenté aux slides suivantes:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S_x} \quad [\mathrm{Pa} = \mathrm{Nm}^{-2}] \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{ox}}$$

E est le rapport entre contrainte et déformation, près de la position d'équilibre r_0, en considérant que la surface d'application de la force est la surface d'une maille. On voit que plus ε_0 est grand (en valeur absolue) et plus r_0 est petit, plus cette rigidité E sera grande.

Propriétés élastiques des matériaux cristallins

Calcul:



En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$

Résumé

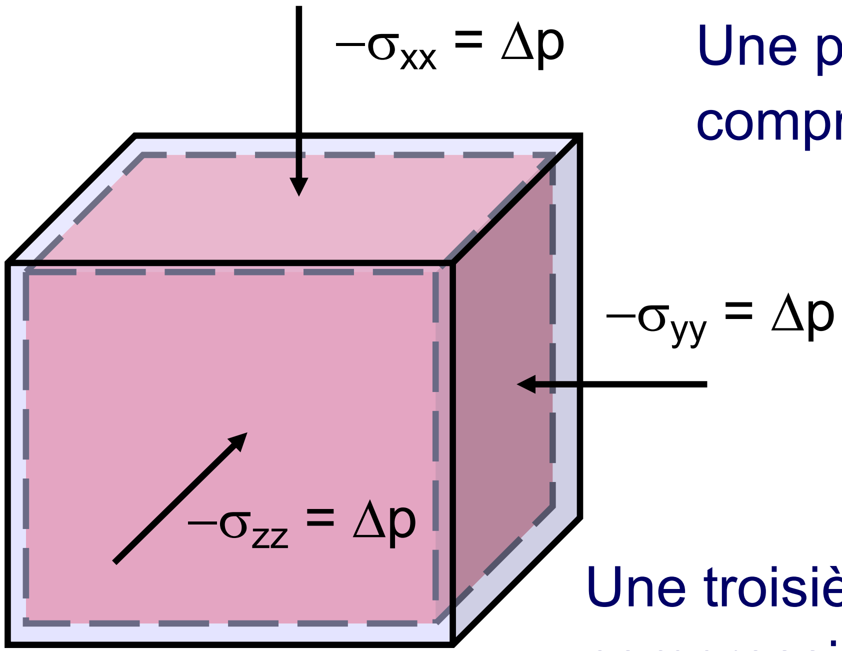
- Le module d’élasticité et le module de cisaillement d’un matériau définissent sa rigidité.
- Les déformations engendrent une variation de volume, qui dépend du module de Poisson!
- Ces propriétés dépendent essentiellement des liaisons inter-atomiques/moléculaires.
- Des tests simples quasi-statiques ou dynamiques (ondes) permettent de déterminer ces propriétés.
- Un matériau est censé être utilisé dans son domaine élastique si on veut retrouver la forme initiale lorsqu’on relâche la contrainte.

A retenir du cours d'aujourd'hui

- *Connaître les définitions de contrainte, déformation, module d'élasticité, coefficient de poisson, coefficient de compressibilité, module de cisaillement.*
- *Savoir retrouver ces éléments sur une courbe de traction*
- *Savoir retrouver le module « idéal » d'un matériau à partir du potentiel de Lennard Jones.*

Compression hydrostatique- Démonstration

On peut décomposer la pression en trois temps:



Une première compression selon x:

$$\begin{array}{lclcl} L_{0x} & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon_{xx}) & = & L_{0x}(1+\varepsilon_{xx}) \\ L_{0y} & \rightarrow & L_{0y}(1+\varepsilon_{yy}) & = & L_{0y}(1-\nu\varepsilon_{xx}) \\ L_{0z} & \rightarrow & L_{0z}(1+\varepsilon_{zz}) & = & L_{0z}(1-\nu\varepsilon_{xx}) \end{array}$$

Une seconde compression selon y:

$$\begin{array}{lcl} L_{0x}(1+\varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) \\ L_{0z}(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \end{array}$$

Une troisième compression selon z:

$$\begin{array}{lcl} L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) \end{array}$$

En reportant sur les volumes:

$$\begin{array}{lcl} V_0 & = & L_{0x}L_{0y}L_{0z} \\ V & = & L_{0x}L_{0y}L_{0z}(1+(1-2\nu)\varepsilon)^3 \quad = \quad V_0(1+(1-2\nu)\varepsilon)^3 \end{array}$$

$$K = -\frac{V_0}{\Delta V}\Delta p = -\frac{V_0}{V-V_0}\Delta p = -\frac{V_0}{V_0(1+3(1-2\nu)\varepsilon-1)}\Delta p = \frac{-\Delta p}{3(1-2\nu)\varepsilon}$$

soit $\mathrm{K} = \frac{1}{3(1-2\nu)}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$